ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DES ARTS ET INDUSTRIES TEXTILES - ROUBAIX
CONCOURS D'ENTRÉE -Session 1987

1ère épreuve de Mathématiques

(Dureé : 2H)

Cette épreuve est destinée aux élèves des classes de Mathématiques Spéciales M, P, P', T, TA, TB

Corrigé

1. (a) On a $M_n(b,a) = {}^tM_n(a,b)$, donc $D_n(b,a) = D_n(a,b)$.

(b) À chaque colonne on retranche la précédente, on obtient donc :

$$D_n(a,b) = \begin{vmatrix} 1 & -b-1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -a & 1+a & -b-1 & 0 & \dots & 0 \\ -a & 0 & 1+a & -b-1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -a & 0 & 0 & 0 & \ddots & -b-1 \\ -a & 0 & 0 & 0 & \dots & 1+a \end{vmatrix}$$

et on développe selon la dernière ligne

$$D_n(a,b) = -a(1+b)^{n-1} + (1+a)D_{n-1} \text{ avec } n \geq 2.$$

On prend donc $f(a) = 1+a$ et $g(a,b) = -a(1+b)^{n-1}$. D'où

$$D_n(a,b) = -a\left[(1+b)^{n-1} + (1+a)(1+b)^{n-2} + ... + (1+a)^{n-2}(1+b)^1\right] + (1+a)^{n-1}D_1(a,b).$$

Ainsi, par sommation géométrique des premiers termes, on obtient :

$$D_n(a,b) = \frac{b(1+a)^n - a(1+b)^n}{b-a}.$$

(c) On retranche la colonne C_1 aux autres colonnes C_i ($2 \leq i \leq n$ pour faire apparaître des 0 :

$$D_n(a,a) = \begin{vmatrix} 1 & -a-1 & -a-1 & ... & -a-1 \\ -a & 1+a & 0 & ... & 0 \\ -a & 0 & 1+a & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a & 0 & 0 & ... & 1+a \end{vmatrix}$$

On remplace ensuite la première L_1 par la somme $L_1 + L_2 + L_3 + ... + L_n$ pour obtenir une matrice triangulaire inférieure :

$$D_n(a,a) = \begin{vmatrix} 1-(n-1)a & 0 & 0 & ... & 0 \\ -a & 1+a & 0 & ... & 0 \\ -a & 0 & 1+a & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a & 0 & 0 & ... & 1+a \end{vmatrix} = \left[1-(n-1)a\right](1+a)^{n-1}.$$

2. (a) On a $D_n(a,b) > 0$ si, et seulement si, $b(1+a)^n - a(1+b)^n > 0$ (car $b-a>0$) ce qui est équivalent à $\dfrac{a}{(1+a)^n} < \dfrac{b}{(1+b)^n}$.

D'autre part, considérons la fonction $g(x) = \dfrac{x}{(1+x)^n}$. g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,+\infty[$ et

$$\forall x \geq 0,\ \ g'(x) = \frac{(1+x)^{n-1}\left[1-(n-1)x\right]}{(1+x)^{2n}}.$$

D'où la tableau de variations de g :

x	0		$\frac{1}{n-1}$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	0	$\nearrow$	$g\left(\frac{1}{n-1}\right)$	$\searrow$	0

Donc la fonction g est strictement croissante sur $[0,+\infty[$ et en particulier si $a < b \leq \dfrac{1}{n-1}$, alors $g(a) < g(b)$, c'est-à-dire $\dfrac{a}{(1+a)^n} < \dfrac{b}{(1+b)^n}$, et donc $D_n(a,b) > 0$.

(b) On a $\det M_n(a,a) = \left[1-(n-1)a\right](1+a)^{n-1}$, donc $\det D_n(a,a) > 0$ si, et seulement si, $1-(n-1)a > 0$ ou encore $a < \dfrac{1}{n-1}$.

3. (a) Notons $\chi_n(a,b)$ le polynôme caractéristique de $M_n(a,b)$. Comme dans la première question, si $a=b$, on trouve :

$$\chi_n(a,a)(\lambda) = (\lambda-1-a)^{n-1}\left[\lambda - 1 + (n-1)a\right].$$

Donc $M_n(a,a)$ admet deux valeurs propres (réelles), $1+a$ d'ordre $n-1$ et $1-(n-1)a$ simple.

La matrice $M_n(a,a)-(1+a)I_n$ est de rang 1, toutes les colonnes sont identiques à $\begin{pmatrix} -a \\ -a \\ \vdots \\ -a \end{pmatrix}$, donc le sous espace associé à cette valeur propre est de dimension $n-1$, c'est l'hyperplan d'équation $\displaystyle\sum_{n=1}^{n} x_i = 0$.

On remarque que $M_n(a,a)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \left[1-(n-1)a\right]\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$, donc $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé à la valeur propre $1-(n-1)a$.

(b) Les deux sous-espaces propres sont des sous-espaces supplémentaires, donc $M_n(a,a)$ est diagonalisable.

4. (a) Comme dans la première question, on trouve :

$$\chi_n(a,b)(\lambda) = \frac{a(\lambda-1-b)^n - b(\lambda-1-a)^n}{a-b}.$$

Donc les valeurs propres de $M_n(a,b)$ sont les racines de l'équation

$$a(\lambda-1-b)^n - b(\lambda-1-a)^n = 0. \tag{1}$$

(b) • Si $a=0$, 1 est la seule valeur propre et dans ce cas $M_n(0,b)$ ne peut pas être diagonalisable, sauf si $b=0$ ce qui est absurde.

• Si $a \neq 0$ l'équation (1) est équivalente à $\left(\dfrac{\lambda-1-a}{\lambda-1-b}\sqrt[n]{\dfrac{b}{a}}\right)^n = 1$, donc les valeurs propres de $M_n(a,b)$ sont données par les formules :

$$\lambda_k = 1 + \frac{a\sqrt[n]{\frac{b}{a}} - bw^k}{\sqrt[n]{\frac{b}{a}} - w^k}, \quad w^k = e^{\frac{2i\pi k}{n}}, \quad k = 0, 1, ..., n-1.$$

On peut vérifier facilement que les λ_k sont distinctes, donc la matrice $M_n(a,b)$ est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

(c) Soit $\lambda \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned}
\lambda \text{ valeur propre de } M_n(a,b) &\Rightarrow \chi_n(a,b)(\lambda) = 0 \\
&\Rightarrow y(\lambda-(1+a))^n - a(\lambda-(1+b))^n = \frac{a}{b} \\
&\Rightarrow \left|\frac{\lambda-(1+a)}{\lambda-(1+b)}\right| = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}.
\end{aligned}$$

Soient M le point du plan d'affixe λ. k étant un réel strictement positif et distinct de 1. On peut $G_1 = \text{bar}(A(1), B(-k))$ (barycentre de $A(1)$ et $B(-k)$) et $G_2 = \text{bar}(A(1), B(k))$ sont bien définis.

$$\begin{aligned}
\lambda \text{ valeur propre de } M_n(a,b) &\Rightarrow MA = kMB \\
&\Rightarrow MA^2 - k^2MB^2 = 0 \\
&\Rightarrow (\overrightarrow{MA} - k\overrightarrow{MB})(\overrightarrow{MA} + k\overrightarrow{MB}) = 0 \\
&\Rightarrow (1-k)\overrightarrow{MG_1}.(1+k)\overrightarrow{MG_2} = 0 \\
&\Rightarrow \overrightarrow{MG_1}.\overrightarrow{MG_2} = 0 \\
&\Rightarrow M \text{ est sur le cercle } \mathscr{C} \text{ de diamètre } [G_1, G_2].
\end{aligned}$$

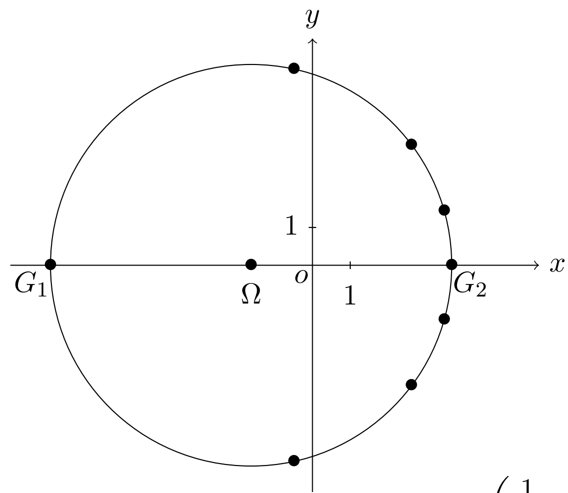
Les affixes de G_1 et de G_2 sont respectivement $x_{G_1} = 1 + \dfrac{a-kb}{1-k}$ et $x_{G_2} = 1 + \dfrac{a+kb}{1+k}$. Donc le centre Ω de $\mathscr{C}$ est le point d'affixe $\dfrac{x_{G_1}+x_{G_2}}{2} = 1 + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a-kb}{1-k} + \dfrac{a+kb}{1+k}\right)$ et le rayon R vaut $\dfrac{G_1G_2}{2} = (b-a)\dfrac{k}{|1-k^2|}$.

5. Application : $n = 8$, $a = \dfrac{1}{32}$ et $b = 8$.

$$\begin{aligned}
\text{Sp}(M_8\left(\frac{1}{32}, 8\right)) &= \left\{ 1 + \frac{\frac{1}{16} - 8w^l}{2 - w^l}, \quad w^l = e^{\frac{i\pi l}{4}}, \quad l = 0, 1, ..., 7 \right\} \\
&= \left\{ 1 + \frac{\frac{1}{16} - 8z}{2 - z}, \quad z \in \mathbb{U}_8 \right\} \\
&= \left\{ \frac{33 - 144z}{32 - 16z}, \quad z \in \mathbb{U}_8 \right\}
\end{aligned}$$

où

$$\mathbb{U}_8 = \left\{ 1, -1, i, -i, \frac{1+i}{\sqrt{2}}, \frac{1-i}{\sqrt{2}}, \frac{-1+i}{\sqrt{2}}, \frac{-1-i}{\sqrt{2}} \right\}.$$



Images des différentes valeurs propres de $M_8\left(\frac{1}{32}, 8\right)$.

●●●●●●●●●●